Eva MÜLLER-HILL, Köln

Zur erklärenden Funktion geometrisch-zeichnerischer Darstellungen (GZDs)

1. Semiotische Aspekte mathematischen Erklärens

Das allgemeine Modell mathematischen Erklärens-warum, von dem die folgende Untersuchung ausgeht, ist eine Adaption eines wissenschaftstheoretischen Modells sogenannten nomischen Erklärens nach Bartelborth (2007) (vgl. dazu genauer (Müller-Hill 2011, 2012)). Demnach vollzieht sich eine mathematische Erklärung anhand eines hinreichend bereichsinvarianten Arguments mit Bezug auf allgemeine, stabile, essentielle Eigenschaften von für die Gültigkeit des Explanans und die Realisierung des Explanandums relevanten, grundlegenden Objekten. Eine wichtiges Charakteristikum dieser Erklärungskonzeption ist die Theorieabhängigkeit der Nomizitätseigenschaft. Im Folgenden gehe ich stets von einer gegebenen festen Hintergrundtheorie, die in erster Linie durch ihre grundlegenden Objekte und deren essentielle Eigenschaften und Beziehungen bestimmt ist, und einem darüber verfügenden hypothetisch-idealen Adressaten aus und suche nach in diesem Sinne intrinsischen Kriterien für das Erklärungspotential eines mathematischen Argumentes. Semiotische Aspekte, d.h. die Art und Weise der Zeichenverwendung im Argument, bilden dabei eine Kategorie möglicher intrinsischer Kriterien. Auf die Ausgangsfrage nach dem prinzipiellen Erklärungspotential der Zeichenverwendung in einem mathematischen Argument lassen sich hier zunächst zwei Ebenen unterscheiden: die Objektebene und die Eigenschafts- und Beziehungsebene. Mit Bezug auf diese Unterscheidung sind die folgenden beiden Thesen zum semiotischen Erklärungspotential von GZDs zu verstehen, die ich im Rahmen dieses Beitrages ohne weitere Motivation direkt formuliere:

These 1: Das semiotische Erklärungspotential von GZDs in mathematischen Argumenten für den Mathematikunterricht besteht zum einen darin, die für die Erklärung relevanten Basisobjekte durch "natürliche" oder explizit definierbare, sichtbare Zeichenkonstituenten, einzelne Basiszeichen oder Zeichenkomplexe in einem geometrischen Zeichensystem zu bezeichnen und damit sichtbar zu machen. Zum anderen werden die einer potentiellen Erklärungsbeziehung zugrundeliegenden essentiellen Eigenschaften der Basisobjekte sowie deren allgemeine Beziehungen als natürlicherweise oder definitorisch ausgezeichnete Konstruktions-, Manipulations- und Transformationsmöglichkeiten oder Invarianten darunter auf eine konkrete Handlungsebene abgebildet und damit hantierbar gemacht. Das so bezeichnete Explanandum wird also relativ zu einer geometrisch-anschaulichen

Hintergrundtheorie kausal erklärbar als Wirkung zulässigen Hantierens mit und an den Zeichen des Explanans.

These 2: Das besondere Erklärungspotential sowie spezifische Schwierigkeiten liegen hier auf der Eigenschafts- und Beziehungsebene. (Dagegen wird das Erklärungspotential von GZDs im Mathematikunterricht oft verkürzt nur in Bezug auf die Objektebene gesehen.)

Diese Thesen möchte durch drei (hier sehr skizzenhaft ausfallende) Beispielanalysen illustrieren und stützen. Den begrifflich-theoretischen Rahmen der Analyse bildet die semiotische Theorie von Peirce.

2. Semiotische Theorie der Zeichenrolle von GZDs

Im Folgenden werden GZDs grundsätzlich als ikonische Zeichen im Sinne von Peirce (1966) aufgefasst, d.h. als Zeichen, die zum bezeichneten Objekt in einer Ähnlichkeitsrelation stehen. Peirce differenziert ikonische Zeichen u.a. in Abbilder, bei denen die Ähnlichkeit zwischen "simple qualities" von ikonischem Zeichen und Objekt besteht (Bsp.: Photo), und Diagramme, bei denen die Ähnlichkeit zwischen der Form des Ikons und der relationalen Struktur innerhalb des Objekts besteht (Bsp.: Stadtplan).[1]

Peirces Differenzierung kann auf die Erklärungsfunktion von Abbild und Diagramm erweitert werden. Diagramme und Abbilder repräsentieren Basisobjekte in unterschiedlicher Weise: abbildhaft in direktem Bezug auf wahrnehmbare (z.B. visuelle) Qualitäten vs. relational-strukturell. Auch und vor allem aber identifizieren sie essentielle (also erklärungskonstituierende) Eigenschaften ihrer Objekte auf unterschiedliche Weise: Das Abbild via natürlicher Manipulationen direkt wahrnehmbarer Qualitäten des physischen Zeichens und (systematischer) Exploration von hinreichend stabilen Invarianten, das Diagramm dagegen via regelkonformer, natürlicherweise oder definitorisch ausgezeichneter strukturell-relationaler Transformationen und deren strenger Invarianten. Letztlich stellen Abbilder und Diagramme unterschiedliche Typen (in Bezug auf den logischen Status) von Erklärungsbeziehungen dar.

3. Beispielanalysen

1. Beispiel: GZDs im propädeutischen vs. abstrakten Geometrieunterricht

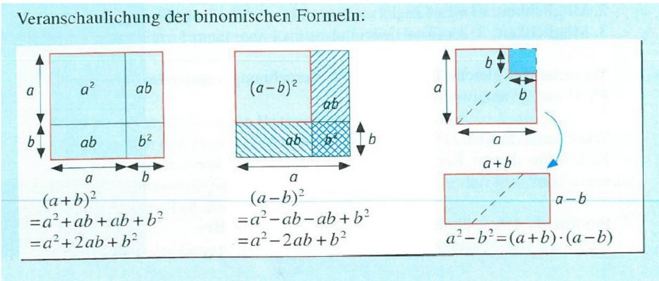
Dieses Beispiel bezieht sich auf die Rolle des Erkennens des Zeichenstatus von GZDs in einer mathematischen Argumentation beim Übergang vom propädeutischen zum abstrakten Geometrieunterricht: Im propädeutischen

---

1 Eine weitere Kategorie ikonischer Zeichen bilden die Metaphern, auf die ich im Rahmen dieses Beitrages aber nicht weiter eingehe.

Geometrieunterricht werden GZDs vor allem zur Begriffsbildung und zur Exploration geometrischer Lehrsätze (Winkelsumme etc.) eingesetzt. Die Schülerinnen und Schüler (SuS) gehen dabei mit GZDs im zeichentheoretischen Sinne als Abbilder um (vgl. Struve 1990). Im abstrakten Geometrieunterricht dienen GZDs neben der Veranschaulichung relevanter Basisobjekte und ggf. zur Verdeutlichung der Notation. Vor allem aber sollen sie hier allgemeine geometrische Argumentationen begleiten und vor dem Hintergrund einer allgemeinen geometrischen Theorie erklären. Dazu müssen sie aber als diagrammatische Zeichen interpretiert werden. Genau dieser semiotische Rollenwechsel wird von den SuS oft nicht vollzogen (vgl. prominent Schoenfeld 1985).

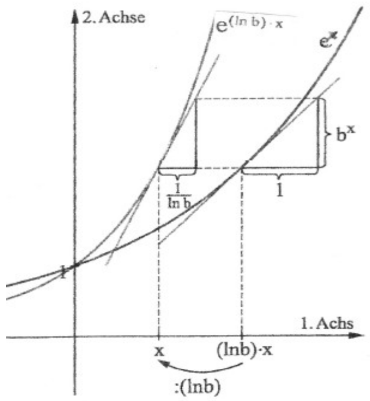
2. Beispiel: Veranschaulichungen der binomischen Formeln



Im Algebraunterricht werden GZDs diagrammatisch zur anschaulichen Rechtfertigung und Erklärung der Gültigkeit algebraischer Gleichungen eingesetzt. Die Basisobjekte der geometrischen Hintergrundtheorie sind dabei Figuren. Essentielle Eigenschaften von Figuren, die häufig konstitutiv für die anschauliche Erklärung sind, ist die Invarianz des Flächeninhalts unter unterschiedlichen Transformationen wie das Zerlegen, das Umordnen in und das Bewegen der gesamten Ebene. Im Falle des obigen Beispiels zur Veranschaulichung der binomischen Formeln zeigen sich trotz dieser Gemeinsamkeiten wichtige Unterschiede in Bezug auf das Erklärungspotential der drei GZDs: Zum einen (auf Objektebene) referieren die ersten beiden GZDs nur auf Basisobjekte, die den für die zugehörige binomische Formel relevanten, darin tatsächlich vorkommenden Termen entsprechen. Auf Eigenschaftsebene referieren sie auf die Eigenschaft der Einteilungsinvarianz von Flächen. Die dritte GZD bezieht sich auch auf Objekte, denen kein relevanter Term der Formel entspricht. Auf Eigenschaftsebene referiert sie darüber hinaus auf die Bewegungsinvarianz von Flächen, und setzt damit u.a. andere Grundvorstellungen zum Begriff „Flächeninhalt“ voraus.

3. Beispiel: Die Ableitung von Exponentialfunktionen

Im Schulbuch "Elemente der Mathematik – LK“ wird die Ableitung der allgemeinen Exponentialfunktion vor der kalkülhaften Begründung mittels Kettenregel auf der Grundlage einer geeigneten algebraischen Darstellung mithilfe der unten abgebildeten GZD anschaulich begründet. Die GZD übernimmt dabei die Rolle eines (komplexen) Diagramms.



Die Basisobjekte der geometrischen Hintergrundtheorie sind Kurven, Tangenten und Figuren (Dreiecke), die erklärungsrelevanten Konstruktions- und Transformationsregeln im Koordinatensystem ohne Skala sind die Regel zur Tangentenkonstruktion mit Punkt und normiertem Steigungsdreieck und zur graphischen Streckung um einen konstanten Faktor ln b in x-Richtung. Hinzu tritt als erklärungskonstitutiv auf Eigenschaftsebene eine weitere allgemeine Manipulationsregel, deren Transparenz und Motivation für die SuS als Adressaten der potentiellen Erklärung gegeben sein muss: *Tangenten gehen unter Streckung der Kurve/ Ebene wieder in Tangenten über.*

4. Fazit

Die Beispielanalysen stützen Thesen (1) und (2) und unterstreichen damit, dass GZDs ein durchaus leistungsstarkes Instrument für mathematisches Erklären im Unterricht darstellen. Insbesondere wird die Erklärungsbeziehung selbst durch das Argumentieren mit GZDs als quasi kausal verständlich im Anschluss an unser Alltagsverständnis von Erklärungen. Problematisch bleibt eine verkürzte Sichtweise der Erklärungsfunktion von GZDs nur mit Bezug auf die Objektebene: der unterschiedliche Repräsentationsstatus von Zeichen in Bezug auf ihr Objekt wirkt sich, wie oben gesehen, erst auf Eigenschaftsebene wirklich aus und wird daher leicht übersehen. Ebenso werden durch eine oberflächliche Bewertung des erklärenden Nutzens von GZDs im Unterricht nur auf der Objektebene die Transparenz und Nachvollziehbarkeit der grundlegenden Konstruktions- und Transformationsmöglichkeiten für SuS u.U. nicht hinreichend hinterfragt und sichergestellt. Dadurch wird das vorhandene Erklärungspotential von GZDs letztlich nicht ausgeschöpft.

Literatur

Bartelborth, T. (2007). Erklären. Berlin: De Gruyter.

Müller-Hill, E. (2011). "Mathematische Erklärung – Wissenschaftsphilosophische Konzeptionen und ihre Relevanz für die Mathematikdidaktik". BzMU 2011, 583-586.

Müller-Hill, E. (2012). "Ein handlungsbasiertes Konzept mathematischer Erklärung". BzMU 2012, 617-620.

Peirce, Ch. S. (1966). Collected Papers of Charles Sanders Peirce. Hartshorne, Ch., & Weiss, P. (Hrsg.), Bde. 1-6. Cambridge: Harvard University Press.

Schoenfeld, A. (1985). Mathematical Problem Solving. New York: Academic Press.

Struve, H. (1990). Grundlagen einer Geometriedidaktik. Mannheim: BI-Verlag.